Technical Report

IRI-TR-09-07

Reducció de variables en problemes de control predictiu amb restriccions d'igualtat

IRI Technical Report

Bernat Joseph i Duran
Carlos Ocampo-Martínez

Institut de Robòtica i Informàtica Industrial

Abstract

En el següent document es mostra una tècnica per utilitzar les restriccions d'igualtat associades a un problema de control predictiu per tal de reduir el nombre de variables que intervenen en aquest problema. Primerament fem un repàs de les notacions i desenvolupament del problema estàndard per veure, després, que mitjançant un canvi lineal el nou problema, amb un nombre inferior de variables, té una estructura completament anàloga. Alguns resultats de temps de computació mostren, en la última secció, la utilitat del mètode.

Institut de Robòtica i Informàtica Industrial (IRI)
Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
Llorens i Artigas 4-6, 08028, Barcelona, Spain

Tel (fax): +34 93 401 5750 (5751)
`http://www.iri.upc.edu`

Corresponding author:

Bernat Joseph i Duran
tel: +34 93 401 5805
`bjoseph@iri.upc.edu`
`http://www.iri.upc.edu/people/bjoseph`

Índex

1 Presentació del problema

Considerem el problema de control representat pel següent sistema dinàmic a temps discret:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) + B_p\,d(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

on

$$\begin{aligned} x(k) \in \mathbb{R}^n &\quad \text{són les variables d'estat} \\ u(k) \in \mathbb{R}^{m_i} &\quad \text{són les variables manipulades} \\ d(k) \in \mathbb{R}^{m_d} &\quad \text{són pertorbacions mesurades} \end{aligned}$$

Les variables d'estat i les manipulades estan subjectes a restriccions de desigualtat

$$x_{min} \leq x(k) \leq x_{max} \tag{2}$$

$$u_{min} \leq u(k) \leq u_{max} \tag{3}$$

i les pertorbacions es relacionen amb els controls mitjançant igualtats

$$E\,u + E_d\,d = 0$$

1.1 Control predictiu

Anem a considerar el problema de control l'objectiu del qual consisteix en mantenir $x(k)$ proper a un valor predeterminat x_r mitjançant mínimes variacions en les variables de manipulades. Per tal d'assolir aquest objectiu, a cada instant k es calculen els controls $u(k)$ de manera que minimitzin una funció de cost de la forma

$$V(k) = \Delta u(k)^\top W_u \Delta u(k) + (x(k) - x_r)^\top W_x (x(k) - x_r),$$

on $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ i W_u i W_x són matrius diagonals que eventualment poden donar diferents pesos a les diferents components de $\Delta u(k)$ i $x(k) - x_r$.

Tot seguit veurem com les variables de control òptimes en cada instant k es poden obtenir com la solució d'un problema de programació quadràtica (*quadratic programming*, QP) amb restriccions, és a dir, de la forma:

$$\begin{gathered} \min_x x^\top \Phi x + \phi^\top x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x = b_2 \end{gathered}$$

Per tal d'assolir l'objectiu a mig termini es considera el problema estès a un *horitzó de predicció* H_p. És a dir, considerem el sistema en H_p instants a partir de l'instant inicial. El fet de conèixer explícitament les equacions (1) que descriuen la dinàmica del sistema permet obtenir expressions de l'estat del sistema en el futur a partir de les condicions inicials. Aquestes són les *prediccions* que porten a anomenar *control predictiu basat en models* (*model predictive control*, MPC) al mètode següent.

Considerem les equacions del sistema en H_p instants

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) + B_p\,d(k) \\
x(k+2) &= A\,x(k+1) + B\,u(k+1) + B_p\,d(k+1) \\
&\cdots \\
x(k+H_p) &= A\,x(k+H_p-1) + B\,u(k+H_p-1) + B_p\,d(k+H_p-1)
\end{aligned}$$

Substituint la primera expressió en la segona s'obté $x(k+2)$ en termes de $x(k)$. Aquesta nova expressió es pot introduir en la tercera igualtat per obtenir $x(k+3)$ de nou en termes de $x(k)$. Reiterant el procés s'obté la següent expressió:

$$X = \sigma + \Lambda\,\mathcal{U} + \Upsilon\,\mathcal{D}, \tag{4}$$

on

$$X = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ \vdots \\ x(k+H_u) \\ \vdots \\ x(k+H_p) \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{H_u} \\ \vdots \\ A^{H_p} \end{bmatrix} x(k),$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A^{H_u-1}B & A^{H_u-2}B & \cdots & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ A^{H_p-1}B & A^{H_p-2}B & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{H_p-H_u} A^i B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+H_u-1) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} B_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB_p & B_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A^{H_u-1}B_p & \cdots & B_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A^{H_p-1}B_p & A^{H_p-2}B_p & \cdots & \cdots & B_p \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \\ \vdots \\ d(k+H_u-1) \\ \vdots \\ d(k+H_p-1) \end{bmatrix}.$$

Noti's que, en el cas més general, es pot considerar que les variables manipulades esdevenen constants a partir d'un cert nombre d'instants H_u (*horitzó de control*), $H_u < H_p$, tal com queda reflectit en les expressions anteriors.

1.2 La funció de cost

L'anàleg a la funció de cost quan considerem el problema estès a H_p instants pot expressar-se com

$$V(k) = \Delta\mathcal{U}^\top W_{\mathcal{U}} \Delta\mathcal{U} + (X - X_r)^\top W_X (X - X_r)$$

amb

$$W_X = \begin{pmatrix} W_x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_x \end{pmatrix}, \quad W_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} W_u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_u \end{pmatrix}$$

i $\Delta\mathcal{U}$ definida de manera anàloga a $\mathcal{U}$.

En l'equació (4) hem expressat X en funció de $\mathcal{U}$, per tant la funció de cost $V(k)$ depèn únicament de $\mathcal{U}$.

Donat que volem minimitzar la variació en les variables manipulades, és convenient expressar la funció de cost i les restriccions en termes d'aquestes variacions

$$\Delta u(k+j) = u(k+j) - u(k+j-1). \tag{5}$$

De nou, aplicant la definició (5) reiteradament podem expressar matricialment

$$\mathcal{U} = \Theta\Delta\mathcal{U} + \Pi u(k-1), \tag{6}$$

on

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_{m_i} & 0 & \dots & 0 \\ I_{m_i} & I_{m_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m_i} & I_{m_i} & \dots & I_{m_i} \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} I_{m_i} \\ I_{m_i} \\ \vdots \\ I_{m_i} \end{pmatrix}.$$

En termes de $\Delta\mathcal{U}$, (4) esdevé

$$X = \rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D}, \tag{7}$$

amb

$$\rho = \sigma + \Lambda\Pi u(k-1).$$

Així, a cada instant k, cal trobar $\Delta\mathcal{U}^*(k)$ que minimitzi

$$\begin{aligned} V(k) &= \Delta\mathcal{U}^\top W_{\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U} + (X - X_r)^\top W_X (X - X_r) \\ &= \Delta\mathcal{U}^\top W_{\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U} + (\sigma + \Lambda\,\mathcal{U} + \Upsilon\,\mathcal{D} - X_r)^\top W_X (\sigma + \Lambda\,\mathcal{U} + \Upsilon\,\mathcal{D} - X_r) \\ &= \Delta\mathcal{U}^\top W_{\mathcal{U}}\Delta\mathcal{U} + (\rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D} - X_r)^\top W_X (\rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D} - X_r) \\ &= \Delta\mathcal{U}^\top \underbrace{\left[W_{\mathcal{U}} + \Theta^\top\Lambda^\top W_x\Lambda\Theta\right]}_{\Phi} \Delta\mathcal{U} + \underbrace{2(\Upsilon\mathcal{D} + \rho - X_r)^\top W_x\Lambda\Theta}_{\phi^\top} \Delta\mathcal{U} + cst \\ &= \Delta\mathcal{U}^\top\Phi\Delta\mathcal{U}(k) + \phi^\top\Delta\mathcal{U} + cst, \end{aligned}$$

que és una funció quadràtica. Noti's que el terme constant al final de l'expressió no intervé en el procés de minimització i, per tant, pot ser ignorat.

1.3 Transformació de les restriccions

Per tal d'acabar de transformar el problema inicial en un problema de QP hem de veure que les restriccions en les variables d'estat i control es poden transformar en restriccions lineals en $\Delta\mathcal{U}$. Per $H_p = 1$ les restriccions en les variables de control són:

$$u_{min} \le u \le u_{max},$$

es poden expressar matricialment de la forma:

$$F_0\, u + f_0 \le 0,$$

amb

$$F_0 = \begin{pmatrix} -I_{m_i} \\ I_{m_i} \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} u_{min} \\ -u_{max} \end{pmatrix}.$$

Per $H_p > 1$ només cal copiar la desigualtat anterior mitjançant una matriu bloc-diagonal:

$$F\,\mathcal{U} + f \leq 0,$$

on

$$F = \begin{pmatrix} -I_{m_i} & & & \\ I_{m_i} & & & \\ & -I_{m_i} & & \\ & I_{m_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -I_{m_i} \\ & & & I_{m_i} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} u_{min} \\ -u_{max} \\ u_{min} \\ -u_{max} \\ \vdots \\ u_{min} \\ -u_{max} \end{pmatrix}.$$

Cada bloc de la matriu i el vector representa la desigualtat en un instant $k+j$ ($j = 0 \ldots H_u - 1$) diferent. Aplicant la transformació (6) i reordenant s'obté:

$$F\,\Theta\,\Delta\mathcal{U} \leq -F\,\Pi\,u(k-1) - f.$$

Les desigualtats en les variables d'estat es tracten de manera anàloga. Substituint X per l'expressió (7) s'obté:

$$G\,\Lambda\,\Theta\,\Delta\mathcal{U} \leq -G(\rho + \Upsilon\mathcal{D}) - p,$$

on G és una matriu anàloga a F i p anàloga a f.

Podem ajuntar les dues desigualtats en una sola expressió matricial de la següent manera

$$\Omega\,\Delta\mathcal{U} \leq \omega,$$

on

$$\Omega = \begin{pmatrix} F\Theta \\ G\Lambda\Theta \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} -F\Pi u(k-1) - f \\ -G(\rho + \Upsilon\mathcal{D}) - p \end{pmatrix}.$$

Finalment, el mateix procés s'aplica a les igualtats i queda

$$H\Delta\mathcal{U} = h,$$

on

$$H = E\,\Theta,$$
$$h = -E_d\,\mathcal{D} - E\,\Pi\,u(k-1).$$

En aquestes expressions ens E i E_d són versions bloc-diagonals de les matrius a les que hem anomenat així inicialment (construides de manera anàloga a $W_{\mathcal{U}}$ i W_X).

Ara, amb totes les definicions que hem donat el problema de programació quadràtica resulta:

$$\Delta\mathcal{U}^*(k) = \arg\min_{\Delta\mathcal{U}} \Delta\mathcal{U}(k)^\top \Phi \Delta\mathcal{U}(k) + \phi(k)^\top \Delta\mathcal{U}(k), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \Omega\Delta\mathcal{U}(k) \leq \omega(k), \\ & H\Delta\mathcal{U}(k) = h(k). \end{aligned} \tag{9}$$

En aquesta última expressió hem fet explícita la dependència en k de les matrius. Aquesta dependència prové de $\mathcal{D}(k)$, $\sigma(k)$ (a través de $\rho(k)$) i $u(k-1)$. Aquest fet és important ja que aquestes matrius hauran de ser recalculades a cada instant, afegint cost computacional al procés, mentre que les altres només caldrà que es contrueixin una única vegada.

2 Reducció de variables

En el que segueix utilitzarem les resitriccions d'igualtat del sistema donades per

$$E\,u + E_d\,d = 0,$$

per tal d'eliminar variables. Suposem que tenim m_{eq} equacions, és a dir, que E és una matriu $m_{eq} \times m_i$ i E_d és una matriu $m_{eq} \times m_d$.

És clar, que les restriccions d'igualtat expressen que les variables de control u no prenen valors a $\mathbb{R}^{m_i}$ sinó en una varietat lineal donada per les equacions anteriors. El que proposem és una manera sistemàtica d'aïllar algunes de les variables en termes d'un conjunt mínim d'altres variables i traslladar el problema a aquest darrer conjunt.

Pel que segueix cal fer les següents suposicions:

- $m_{eq} < m_i$ (hi ha més variables que equacions)
- $\operatorname{rang} E = m_{eq}$ (la matriu del sistema té rang màxim)
- Mitjançant un procés de reducció de Gauss-Jordan la matriu está en forma reduïda escalonada, això és:
  - Totes les files no nul·les estan per damunt de les files nul·les
  - El primer element no nul de cada fila (començant per l'esquerra) es troba a la dreta del primer element no nul de les files superiors
  - El primer element no nul de cada fila és 1 i és l'únic element no nul de la seva columna

Considerem ara el sistema de restriccions d'igualtat en la següent forma:

$$(E\,|E_d)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

El fet que E tingui rang màxim i estigui en forma reduïda escalonada garanteixen que existeix una permutació $\tilde{P}$ de les primeres m_i variables de manera que

$$E\,\tilde{P} = (I_{m_{eq}}\,|\,M_1), \quad M_1 \in \mathbb{R}^{m_{eq} \times m_i - m_{eq}},$$

i

$$(E\,|E_d)\,P = (I_{m_{eq}}\,|\,M_1|M_2), \quad M_2 \in \mathbb{R}^{m_{eq} \times m_d},$$

on

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & I_{m_d} \end{pmatrix}.$$

De fet, $M_2 = E_d$, però la notació resulta més senzilla usant M_2.

Així:

$$(E\,|E_d)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff E\,P\,P^\top \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Definint

$$\tilde{E} = E\,P, \quad \begin{pmatrix} v \\ d \end{pmatrix} = P^\top \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}^\top u \\ d \end{pmatrix},$$

i partint

$$v = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} \in \mathbb{R}^{m_{eq}}, \quad \tilde{u} \in \mathbb{R}^{m_i - m_{eq}},$$

tenim:

$$\tilde{E}\, v = 0 \iff (I_{m_{eq}} \,|\, M_1 | M_2) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \tilde{u} \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff \bar{u} = -M_1\, \tilde{u} - M_2\, d.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1\, \tilde{u} - M_2\, d \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -M_1 \\ I_{m_i - m_{eq}} \end{pmatrix} \tilde{u} + \begin{pmatrix} -M_2 \\ 0_{m_d} \end{pmatrix} d \end{aligned}$$

i de $\tilde{P}^\top u = v$

$$u = \underbrace{\tilde{P} \begin{pmatrix} -M_1 \\ I_{m_i - m_{eq}} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}_1} \tilde{u} + \underbrace{\tilde{P} \begin{pmatrix} -M_2 \\ 0_{m_d} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}_2} d,$$

$$u = \tilde{P}\, \tilde{M}_1\, \tilde{u} + \tilde{P}\, \tilde{M}_2\, d, \tag{10}$$

ja que P és una matriu de permutació i per tant una matriu ortogonal, i.e., $P^{-1} = P^\top$.

Ara podem substituir aquesta expressió en cada una de les funcions i desigualtats que apareixen en el problema de l'apartat anterior. Per començar les equacions del sistema dinàmic esdevenen:

$$x(k+1) = A\, x(k) + B\tilde{P}\tilde{M}_1\tilde{u} + \left[B\tilde{P}\tilde{M}_2 + B_p \right] d,$$

és a dir

$$x(k+1) = A\, x(k) + \tilde{B}\, \tilde{u}(k) + \tilde{B}_p\, d(k),$$

amb

$$\tilde{B} = B\, \tilde{P}\tilde{M}_1, \quad \tilde{B}_p = B\tilde{P}\tilde{M}_2 + B_p.$$

2.1 Notacions

Per tal de poder intruduïr el canvi anterior al problema de minimització de la primera secció expressarem la igualtat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+H_u-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{P}\tilde{M}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{P}\tilde{M}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{P}\tilde{M}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(k) \\ \tilde{u}(k+1) \\ \vdots \\ \tilde{u}(k+H_u-1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \tilde{P}\tilde{M}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{P}\tilde{M}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{P}\tilde{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(k) \\ d(k+1) \\ \vdots \\ d(k+H_p-1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mitjançant la següent notació:

$$\mathcal{U} = \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)\tilde{\mathcal{U}} + \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\mathcal{D}$$

En aquesta notació no s'especifica el nombre de còpies de les matrius que apareixen a la diagonal, però es dedueix fàcilment del context. Per exemple, en la igualtat anterior $\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)$ consta de H_u còpies de $\tilde{P}\tilde{M}_1$ i diag$(\tilde{P}\tilde{M}_2)$ consta de H_p còpies de $\tilde{P}\tilde{M}_2$ per tal que l'expressió sigui coherent.

Ara, usant que $\Delta\mathcal{U}(k) = \mathcal{U}(k) - \mathcal{U}(k-1)$ obtenim

$$\Delta\mathcal{U} = \text{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \text{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\Delta\mathcal{D}.$$

També considerarem igualtats anàlogues a les del sistema inicial per expressar $\tilde{\mathcal{U}}$ i X en termes de $\Delta\tilde{\mathcal{U}}$:

$$\tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Theta}\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\Pi}\tilde{u}(k-1)$$

i

$$X = \tilde{\rho} + \tilde{\Lambda}\tilde{\Theta}\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\Upsilon}\mathcal{D},$$

on

$$\tilde{\rho} = \sigma + \tilde{\Lambda}\tilde{\Pi}\tilde{u}(k-1).$$

Com que en les noves expressions apareixen termes en les variacions de les pertorbacions $\mathcal{D}$ també resultarà útil la següent expressió:

$$\mathcal{D} = \Theta_d\Delta\mathcal{D} + \Pi_d d(k-1)$$

En les expressions anteriors $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Pi}$, Θ_d i Π_d són matrius anàlogues a Θ i Π, però construïdes utilitzant identitats de dimensions $m_i - m_{eq}$ i m_d respectivament. Les matrius $\tilde{\Lambda}$ i $\tilde{\Upsilon}$ són anàlogues a Λ i Υ però construïdes utilitzant $\tilde{B}$ i $\tilde{B}_p$ en comptes de B i B_p.

2.2 Transformació de les restriccions

2.2.1 Restriccions en els controls

Per $Hp = 1$ l'expressió de les restriccions en els controls prenia la forma:

$$F\,u + f \leq 0.$$

Substituïnt la transformació (10):

$$F\,(\tilde{P}\,\tilde{M}_1\,\tilde{u} + \tilde{P}\,\tilde{M}_2\,d) + f \leq 0,$$

i reoredenant, s'obté:

$$F\,\tilde{P}\,\tilde{M}_1\,\tilde{u} \leq -F\,\tilde{P}\,\tilde{M}_2\,d - f. \qquad (11)$$

Anomenant

$$\tilde{F}_H = \text{diag}(F\,\tilde{P}\,\tilde{M}_1), \quad \tilde{f}_H = -\text{diag}(F\tilde{P}\tilde{M}_2)D + (f, f, \ldots, f)^\top$$

tenim la desigualtat (11) estesa tot l'horitzó de control:

$$\tilde{F}_H\tilde{\mathcal{U}} \leq -\tilde{f}_H,$$

d'on

$$\tilde{F}_H\,(\tilde{\Theta}\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\Pi}\tilde{u}(k-1)) \leq -\tilde{f}_H,$$

o bé

$$\tilde{F}_H\,\tilde{\Theta}\Delta\tilde{\mathcal{U}} \leq \tilde{F}_H\,\tilde{\Pi}\tilde{u}(k-1) - \tilde{f}_H.$$

Noti's, en aquest cas, la dependència en D, i per tant en k, de $\tilde{f}_H$.

2.2.2 Restriccions en les variables d'estat

Recordem que per $H_p = 1$ les restriccions tenen la forma

$$G\,x + p \leq 0.$$

Considerem les extensions bloc diagonals $\tilde{G}_H$ i $\tilde{p}_H$ i obtenim

$$\tilde{G}_H\,X \leq -\tilde{p}_H.$$

Ara, usant $X = \rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D}$:

$$\tilde{G}_H\,(\rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D}) \leq -\tilde{p}_H.$$

El càlcul per simplificar aquesta expressió és més llarg que l'anterior. Consisteix en substituir

$$\Delta\mathcal{U} = \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\Delta\mathcal{D}$$

i utilitzar les següents expressions:

- $\rho = \tilde{\rho} + \Lambda\,\Pi\,\tilde{P}\,\tilde{M}_2\,d(k-1) = \tilde{\rho} + \Lambda\,\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\Pi_d\,d(k-1)$,
- $\Theta\,\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\Delta\mathcal{D} + \Pi\tilde{P}\tilde{M}_2\,d(k-1) = \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)(\Theta_d\Delta\mathcal{D} + \Pi_d\,d(k-1)) = \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\mathcal{D}$,
- $\Lambda\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\mathcal{D} + \Upsilon D = \tilde{\Upsilon}\mathcal{D}$.

D'aquesta manera es simplifica

$$G_H\,(\rho + \Lambda\Theta\Delta\mathcal{U} + \Upsilon\mathcal{D}) \leq -p_H \iff \tilde{G}_H\tilde{\Lambda}\tilde{\Theta}\Delta\tilde{\mathcal{U}} \leq -\tilde{G}_H\,(\tilde{\rho} + \tilde{\Upsilon}\mathcal{D}) - \tilde{p}_H$$

2.3 Transformació de la funció de cost

Continuem aplicant el canvi de variables, en aquest cas a la funció de cost:

$$V(k) = \Delta\mathcal{U}^\top\left[W_{\mathcal{U}} + \Theta^\top\Lambda^\top W_x\Lambda\Theta\right]\Delta\mathcal{U} + 2(\Upsilon\mathcal{D} - X_r)^\top W_x\Lambda\Theta\Delta\mathcal{U}$$

Aquest càlcul és bastant llarg ja que consisteix en substituïr l'expressió

$$\Delta\mathcal{U} = \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)\Delta\mathcal{D}$$

en la fórmula anterior, expandir el terme de quadràtic i reagrupar en $\Delta\tilde{\mathcal{U}}$. Finalment, mitjançant manipulacions anàlogues a les que hem fet per simplificar les desigualtats en les variables d'estat i d'agrupar els termes constants s'obté:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(k) &= \Delta\tilde{\mathcal{U}}^\top\left[\tilde{W}_{\mathcal{U}} + \tilde{\Theta}^\top\tilde{\Lambda}^\top W_x\tilde{\Lambda}\tilde{\Theta}\right]\Delta\tilde{\mathcal{U}} + 2\Big[\Delta\mathcal{D}^\top\hat{W}_{\mathcal{U}} + (\tilde{\Upsilon}\mathcal{D} + \tilde{\rho} - X_r)^\top W_x\tilde{\Lambda}\tilde{\Theta}\Big]\Delta\tilde{\mathcal{U}} + cst\\ &= \Delta\tilde{\mathcal{U}}^\top\tilde{\Phi}\Delta\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\phi}^\top\Delta\tilde{\mathcal{U}} + cst,\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{\mathcal{U}} &= \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1)^\top W_{\mathcal{U}}\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1),\\ \hat{W}_{\mathcal{U}} &= \mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_2)^\top W_{\mathcal{U}}\mathrm{diag}(\tilde{P}\tilde{M}_1).\end{aligned}$$

Així doncs, amb tots aquests canvis transformem l'antic problema de programació quadràtica inicial donat per les expressions (8)-(9) en un problema completament anàleg però amb menys variables:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\mathcal{U}}^*(k) &= \Delta\tilde{\mathcal{U}}(k)^\top\tilde{\Phi}\Delta\tilde{\mathcal{U}}(k) + \tilde{\phi}(k)^\top\Delta\tilde{\mathcal{U}}(k),\\ \text{s.t.}\quad &\tilde{\Omega}\Delta\tilde{\mathcal{U}}(k) \leq \tilde{\omega}(k),\end{aligned}$$

on

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_H \, \tilde{\Theta} \\ \tilde{G}_H \tilde{\Lambda} \tilde{\Theta} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_H \, \tilde{\Pi} \tilde{u}(k-1) - \tilde{f}_H \\ -\tilde{G}_H \left(\tilde{\rho} + \tilde{\Upsilon} \mathcal{D}\right) - \tilde{p}_H \end{pmatrix}.$$

Cal destacar que en aquest darrer problema, a més d'haver-hi un nombre inferior de variables, no hi ha restriccions d'igualtat i també que la dependència en k es troba exactament en les mateixes matrius i vectors que en el problema inicial. Un cop resolt aquest problema mitjançant el software adeqüat es pot recuperar la solució del problema inicial

$$\Delta \mathcal{U}^*(k) = \mathrm{diag}(\tilde{P} \tilde{M}_1) \Delta \tilde{\mathcal{U}}^*(k) + \mathrm{diag}(\tilde{P} \tilde{M}_2) \Delta \mathcal{D}(k).$$

En la propera secció discutirem quins avantatges suposa aplicar aquesta reducció a un problema concret.

3 Aplicació i comparació de resultats

Per veure la útilitat que pot tenir el fet de reduir el nombre de variables anem a considerar un cas concret:

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) + B_p\,d(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

amb

$$x(k) \in \mathbb{R}^{17},$$
$$u(k) \in \mathbb{R}^{61},$$
$$d(k) \in \mathbb{R}^{25},$$

subjecte a desigualtats de la forma (2) i (3) en cada component de x i u i a igualtats:

$$E\,u + E_d\,d = 0$$

Els valors de les matrius A, B, B_p, E i E_d així com els dels vectors d, x_{max}, x_{min}, u_{max} i u_{min} es troben en [1]. La matriu E té dimensions 11×61, per tant, tenim $m_i = 61$ variables manipulades i $m_{eq} = 11$ igualtats la qual cosa permet reduir el sistema a 50 variables. Ara bé, el problema d'optimització (QP) no té 61 variables sinó que en té $61H_p$ i el problema reduït en té $50H_p$. La qual cosa és un avantage força considerable si prenem horitzons de l'ordre de 10 o 20.

Pel que hem pogut observar aquesta reducció no suposa cap reducció en el temps de resolució del problema de programació quadràtica, ja que si bé les noves matrius són més petites pel que fa a dimensions, contenen més termes no nuls que les matrius inicials, que són molt esparses, la qual cosa alenteix el temps d'optimització (T_{opt}) lleugerament. Alguns resultats en funció de diferents horitzons de predicció es mostren en la Taula 1(a).

L'avantatge d'aplicar la reducció de variables es troba, de manera significativa, en el temps T_{manip} que es triga a construir i manipular les matrius que intervenen en el sistema (com ara Λ, Θ, $\Omega, \ldots$) tal i com es mostra en la Taula 1(b) per diferents valors de H_p. De manera que en el temps total la reducció de varaibles acaba suposant una reducció de temps considerable (Taula 1(c)).

H_p	$T_{opt}(s)$	
	Nou	Vell
1	2.03	2.31
5	4.45	3.78
10	15.08	9.75
15	41.66	22.47
20	87.34	42.72
25	160.56	75.47
30	244.25	116.60

(a) Temps d'optimització

H_p	$T_{manip}(s)$	
	Nou	Vell
1	0.99	2.19
5	3.64	13.61
10	18.13	62.99
15	53.72	164.31
20	120.33	330.75
25	226.27	579.90
30	381.86	923.28

(b) Temps de manipulació

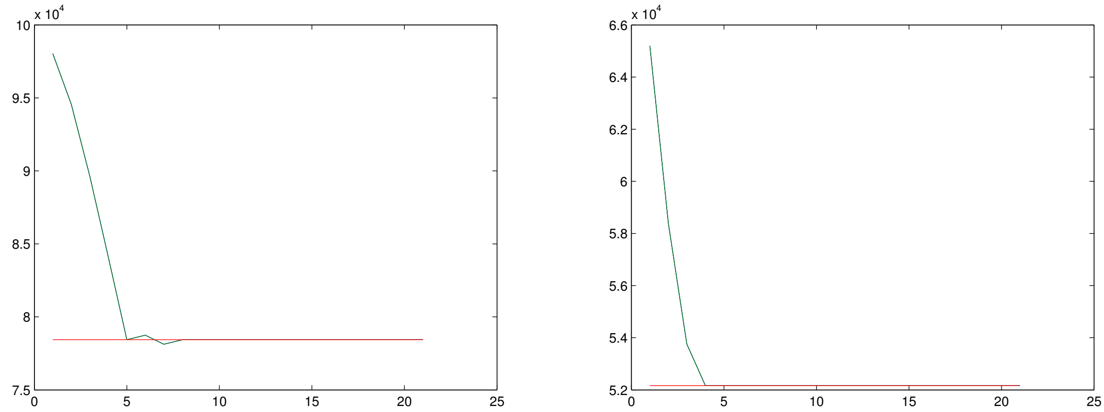
H_p	$T_{total}(s)$	
	Nou	Vell
1	3.02	4.50
5	8.10	17.39
10	33.20	72.73
15	95.38	186.78
20	207.67	373.47
25	386.83	655.37
30	626.11	1039.88

(c) Temps totals

Taula 1: Temps de computació

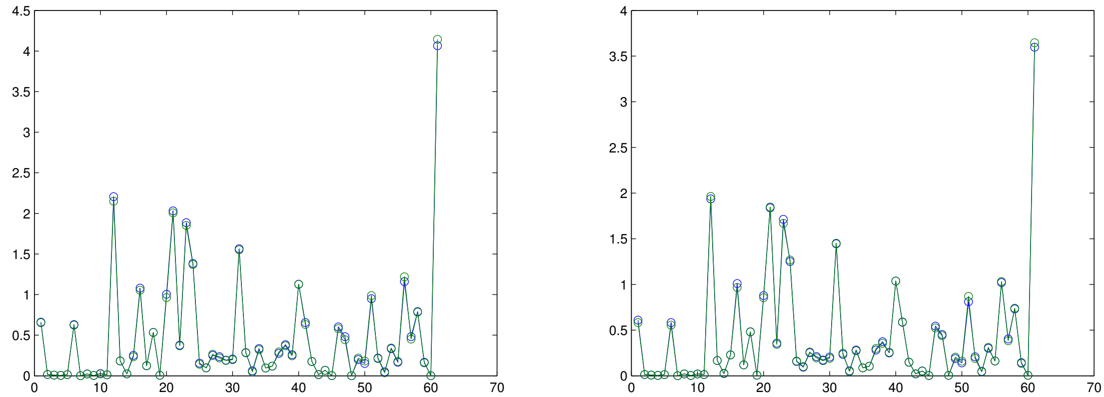
Pel que fa a *performance* (valor de la funció objectiu en cada iteració) es comprova que la diferència entre les variables calculades directament pel programa inicial i les variables obtingudes a partir d'antitransformar els resultats del programa nou, mitjançant l'expressió (10):

$$u = \tilde{P}\,\tilde{M}_1\,\tilde{u} + \tilde{P}\,\tilde{M}_2\,d,$$



(a) Variables x_{32} (b) Variables x_{27}

Figura 1: Variables d'estat calculades pels dos mètodes (20 iteracions, $Hp = 15$).



(a) Iteració 10 (b) Iteració 20

Figura 2: Valor de les components del vector u i de l'antitranfsormat de $\tilde{u}$ ($Hp = 15$)

pateixen desviacions mínimes, la qual cosa fa que les variables d'estat i també el valor de la funció de cost tinguin valors practicament idèntics. En les figures 1 i 2 podem observar alguns gràfics de les variables manipulades i d'estat calculades amb els dos mètodes.

4 Conclusions

Degut a la seva natrualesa lineal, la implementació del mètode de les noves variables resulta senzilla partint d'un programa que resolgui el problema inicial. Així, vistos els resultats de temps de la última secció podem dir que val la pena implementar el canvi sempre que es pretengui resoldre el problema amb horitzons de predicció de l'ordre de 15, 20, 25... Caldria realitzar més proves amb algoritmes més eficients per tal d'evaluar el comportament amb horitzons de predicció més grans i decidir si el temps que es perd en la optimització compensa el que es guanya en la manipulació en aquests casos.

A Resum de matrius i dimensions

Matriu	Dimensions	Matriu	Dimensions
A	$n \times n$	-	-
B	$n \times m_i$	$\tilde{B}$	$n \times m_i - m_{eq}$
B_p	$n \times m_d$	$\tilde{B}_p$	$n \times m_d$
E	$m_{eq} \times m_i$	-	-
E_d	$m_{eq} \times m_d$	-	-
P	$m_i + m_d \times m_i + m_d$	$\tilde{P}$	$m_i \times m_i$
M_1	$m_{eq} \times m_i - m_{eq}$	$\tilde{M}_1$	$m_i \times m_i - m_{eq}$
M_2	$m_{eq} \times m_d$	$\tilde{M}_2$	$m_i \times m_d$
Λ	$H_p n \times H_u m_i$	$\tilde{\Lambda}$	$H_p n \times H_u(m_i - m_{eq})$
Υ	$H_p n \times H_p m_d$	$\tilde{\Upsilon}$	$H_p n \times H_p m_d$
σ	$H_p n \times 1$	-	-
Θ	$H_u m_i \times H_u m_i$	$\tilde{\Theta}$	$H_u(m_i - m_{eq}) \times H_u(m_i - m_{eq})$
-	-	Θ_d	$H_p m_d \times H_p m_d$
Π	$H_u m_i \times m_i$	$\tilde{\Pi}$	$H_u(m_i - m_{eq}) \times m_i - m_{eq}$
-	-	Π_d	$H_p m_d \times m_d$
ρ	$H_p n \times 1$	$\tilde{\rho}$	$H_p n \times 1$
Ω	$(2m_i H_u + 2nH_p) \times H_u m_i$	$\tilde{\Omega}$	$(2(m_i - m_{eq})H_u + 2nH_p) \times H_u(m_i - m_{eq})$
ω	$(2m_i H_u + 2nH_p) \times 1$	$\tilde{\omega}$	$(2(m_i - m_{eq})H_u + 2nH_p) \times 1$
H	$m_{eq} \times H_u m_i$	-	-
h	$m_{eq} \times 1$	-	-

Referències

[1] V. Fambrini and C. Ocampo-Martínez. Modelling and decentralized predictive control of drinking water networks: Barcelona case study. Technical Report Technical IRI Report ref. IRI-TR-04-09, Institut de Robòtica i Informàtica Industrial, Barcelona, 2009.

IRI reports

This report is in the series of IRI technical reports.
All IRI technical reports are available for download at the IRI website
`http://www.iri.upc.edu`.